

# Rezumat

**Clasificare AMS-MSC 2020:** 26E25, 35J60, 47J20, 49J40, 49J53.

În această teză prezentăm o selecție a rezultatelor obținute de autor în ultimul deceniu. Temele discutate aici se află la interfața dintre analiza multifuncțiilor, teoria punctului critic și calculul variațional, cu accent pe lipsa de regularitate a funcționalelor implicate în formularea problemelor studiate.

Lucrarea de față conține 8 capitole structurate după cum urmează. În primul capitol prezentăm câteva noțiuni de bază din domeniile menționate anterior care sunt frecvent utilizate pe parcursul capitolelor următoare, precum și unele rezultate care joacă un rol esențial în demonstrarea rezultatelor principale. Celelalte capitole sunt grupate în două părți: *Metode variaționale pentru incluziuni diferențiale cu condiții de creștere nestandard*, respectiv *Metode topologice pentru inegalități de tip variațional*.

Partea I cuprinde Capitolele 2–5 și este dedicată studiului unor probleme de incluziune guvernate de operatori diferențiali ce generalizează Laplacianul, supuse unor diverse condiții la limită. Abordarea este una variațională, în sensul că soluțiile slabe sunt punctele critice ale funcționalei energetice atașate problemei. În general, această funcțională este local Lipschitz sau de tip Motreanu-Panagiotopoulos (suma dintre o funcțională local Lipschitz și o funcțională proprie, convexă și inferior semicontinuu), dar nu este de clasă  $C^1$ .

Partea a II-a, alcătuită din Capitolele 6–8, este dedicată studiului inegalităților variaționale sau hemivariaționale sau al unor sisteme de astfel de inegalități ce nu posedă o structură variațională, adică nu putem defini o funcțională ale cărei puncte critice să fie soluțiile problemei noastre.

În ultimul capitol al tezei sunt discutate câteva direcții viitoare de cercetare, precum și unele aspecte ale dezvoltării academice a candidatului.

Detaliem mai jos temele abordate în cele două părți ale tezei.

În Capitolul 2 dezvoltăm o metodă pentru obținerea de șiruri Palais–Smale mărginite pentru funcționale local Lipschitz. Noutatea constă în faptul că rezultatul nostru de deformare, care reprezintă baza teoriei dezvoltate aici, nu necesită condiția de Palais–Smale (orice șir Palais–Smale are un subșir convergent) ci utilizează în schimb o condiție la limită impusă într-o regiune a sferei de rază  $R > 0$  centrată în origine, care împiedică deformările să părăsească bila. Eliminând condiția la frontieră obținem o alternativă: fie există un punct critic, fie există o valoare proprie negativă

a cărei funcție proprie corespunzătoare este pe sfera de rază  $R$ . Rezultatele prezentate în acest capitol se regăsesc în lucrarea [35].

În Capitolul 3 sunt prezentate două aplicații ale rezultatelor teoretice din capitolul anterior, sub forma unor probleme de valori proprii superliniare care implică operatorul  $p$ -Laplace, respectiv  $\phi$ -Laplace. Fără a impune o condiție de tip Ambrosetti-Rabinowitz asupra neliniarității ce apare în formularea problemelor, obținem o alternativă privind multiplicitatea soluțiilor slabe netriviale. Acest capitol are la bază lucrările [35] și [39].

Capitolul 4 conține rezultatele din [20] și este dedicat studiului unei incluziuni diferențiale provenite din elasticitatea neliniară. Mai precis, considerăm o problemă guvernată de operatorul diferențial cu fază dublă și exponenți variabili, care modelează comportamentul unui material neomogen și anizotrop de tip Hencky. Formularea variațională în termeni de multiplicatori Lagrange a problemei conduce la un sistem cuplat de inegalități: o inegalitate hemivariațională dublă și o inegalitate variațională.

Ultimul capitol din Partea I tratează o incluziune diferențială guvernată de operatorul  $\phi$ -Laplace cu condiții la limită mixte. Nu presupunem că vreo parte a frontierei are măsură pozitivă, deci cazurile de probleme cu condiție la limită Dirichlet sau Neumann sunt incluse în studiul nostru. Diferite rezultate de existență și multiplicitate sunt obținute dacă funcția  $\phi$  fie domină fie este dominată de ambele  $N$ -funcții ce controlează creșterea neliniarităților ce apar în formularea problemei. Aceste rezultate sunt preluate din lucrarea [33].

În Capitolul 6 considerăm o inegalitate de tip hemivariațional, guvernată de o multifuncție și o funcțională neliniară. Prezența multifuncției în formularea problemei noastre asigură posibilitatea definirii unui tip suplimentar de soluție, numită *soluție tare*, în timp ce prezența funcționalei neliniare în partea dreaptă a inegalității face ca teoria punctului critic să nu poată fie aplicată în acest caz. Rezultatele din acest capitol asigură existența a cel puțin unei soluții dacă multifuncția este inferior hemicontinuă, respectiv a cel puțin unei soluții tari în cazul în care multifuncția este superior hemicontinuă și se regăsesc în lucrarea [40].

Capitolele 7 și 8 sunt dedicate studiului unor sisteme de inegalități hemivariaționale cu funcții de cuplaj neliniare și nu neapărat continue. Principala diferență dintre cele două sisteme este că inegalitățile de pe a doua linie din fiecare sistem au sensuri opuse. Folosind o teoremă de tip minimax datorată lui Brezis, Nirenberg și Stampacchia [12] și Alternativa lui Mosco [84], reușim să demonstrăm existența soluțiilor sub mai multe seturi de ipoteze asupra funcției de cuplaj și asupra neliniarităților implicate în formularea fiecărei probleme. Combinând ipotezele din diferite seturi obținem o varietate largă de rezultate de existență. Capitolul 7 are la bază lucrarea [32], iar Capitolul 8 se bazează pe lucrarea [5].